



Universidade Federal  
de São João del-Rei

Elton Weiglas de Paula

**UMA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS PARCIAIS: AS SÉRIES DE  
FOURIER E A EQUAÇÃO DE ONDAS**

São João del-Rei

Junho de 2019

Elton Weiglas de Paula

**UMA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS PARCIAIS: AS SÉRIES DE  
FOURIER E A EQUAÇÃO DE ONDAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Andréia Malacarne

São João del-Rei, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Banca Examinadora

---

Orientadora: Profa. Dra. Andréia Malacarne

---

Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes

---

Profa. Ms. Marianna Resende Oliveira

São João del-Rei

Junho de 2019

*“ Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes.”  
Sir Isaac Newton.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida.

Agradeço aos meus pais, Elson das Neves Paula e Maria do Rosário da Silva Paula (Rosa), por me amarem incondicionalmente e por serem meus grandes exemplos de dignidade e caráter.

Agradeço a minha esposa, Paloma Teixeira N. de Paula, pelo companherismo, compreensão e paciência durante todos esses anos.

Agradeço ao meu filho Gabriel Nascimento de Paula por ser a razão do meu sorriso.

Agradeço aos meus irmãos Maicon da Silva Paula e Felipe Júnior de Paula pelos incentivos e amizade.

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Andréia Malacarne pela paciência, apoio, comprometimento e dedicação em me orientar. Por ser um exemplo profissional e também em compartilhar um pouco de todo seu conhecimento comigo.

Agradeço aos professores Wilker Thiago Resende Fernandes e Marianna Resende Oliveira por aceitarem o convite em compor e ao contribuir com suas sugestões de aprimoramentos na minha banca de defesa.

Agradeço aos meus colegas de turma, em especial ao Pedro Henrique, por todas as palavras de incentivos e por suportarem minhas lamentações nas aulas.

Agradeço à Universidade Federal de São João del-Rei por me acolher e também a todos os professores do departamento de matemática que contribuíram para minha formação.

*Dedico este trabalho ao meu querido filho Gabriel.*

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de aspectos históricos e conceituais das Equações Diferenciais, com ênfase nas Equações Diferenciais Parciais. Para exemplificar as aplicações destes conceitos, foi feito um estudo das Séries de Fourier e da Equação de Ondas.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Parciais, Equação de Ondas, História das EDP's, Séries de Fourier.

# Abstract

The main objective of this under graduate thesis is the study of historical and conceptual aspects of Differential Equations, with emphasis on Partial Differential Equations. To exemplify the applications of these concepts, a study was made of the Fourier Series and the Wave Equation.

**Keywords:** Partial Differential Equations, Wave Equation, History of EDP's, Fourier Series.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Breve História Sobre As Equações Diferenciais</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>18</b>
2.1	O Conceito de Equação Diferencial Parcial . . . . .	18
2.2	Linearidade . . . . .	20
2.3	Problemas de Valor Inicial e de Contorno . . . . .	22
2.4	O Princípio da Superposição . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>27</b>
3.1	Conceitos preliminares . . . . .	27
3.2	Série de Fourier . . . . .	30
3.3	Convergência pontual da Série de Fourier . . . . .	35
<b>4</b>	<b>A Equação de Ondas</b>	<b>41</b>
4.1	Dedução . . . . .	42
4.2	Resolução por Séries de Fourier . . . . .	45
4.3	A Equação de Ondas e a corda de violão . . . . .	50
	<b>Considerações Finais</b>	<b>53</b>
	Referências . . . . .	53

# Lista de símbolos

$\mathbb{R}^n$  - representará o espaço euclidiano n-dimensional.

$f_i$  ou  $D_i f$  - representará a derivada parcial de  $f$  com respeito a  $i$ -ésima variável independente.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - representará o operador laplaciano.

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  - representará o operador gradiente.

$|\cdot|$  - representará o valor absoluto.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  - representará o produto interno.

$i$  - representará a unidade imaginária, ou seja,  $i = \sqrt{-1}$ .

$\mathcal{R}$  - representará a região do plano  $(x, t)$  determinada por  $0 < x < L$  e  $t > 0$ .

$\overline{\mathcal{R}}$  - representará a união de  $\mathcal{R}$  com sua fronteira que é formada pelas semirretas  $\{x = 0, t > 0\}$  e  $\{x = L, t > 0\}$  e pelo segmento  $\{0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ .

$C^k$  - representará o conjunto das funções  $k$  vezes diferenciáveis.

$L^1$  - representará o espaço das funções  $f$  integráveis tais que  $|f|$  é integrável.

# Introdução

Neste trabalho, temos como objetivo principal apresentar uma introdução à teoria das Equações Diferenciais Parciais, apresentando uma revisão histórica dos principais fatos e estudiosos que contribuíram para a construção da teoria das Equações Diferenciais, bem como os conceitos e resultados básicos envolvendo as Equações Diferenciais Parciais.

As Equações Diferenciais, em especial as Equações Diferenciais Parciais, são grandes ferramentas matemáticas para o estudo de problemas explorados nas diversas áreas do conhecimento, tais como; Física, Química, Engenharias, Biologia, além de serem uma teoria que tem conquistado um espaço significativo na Análise e na Matemática Pura.

O estudo das Equações Diferenciais teve seu início paralelamente ao surgimento do Cálculo, sendo Newton e Leibniz os grandes precursores. Com o avanço do Cálculo, diversos problemas foram modelados por estas equações, sendo vários desses problemas resolvidos por outros ícones da Matemática, tais como, os irmãos Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace; contribuindo, assim, para a consolidação da teoria deste importante instrumento matemático [10].

Como aplicação da teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDP's), estudaremos a Equação de Ondas unidimensional de forma mais detalhada, desde a sua dedução física até sua aplicabilidade no famoso problema de vibrações de cordas elásticas. Ao estudarmos a Equação de Ondas, faremos uso do conceito de Séries de Fourier.

As ondas são um dos principais campos de aplicação da Física estudados atualmente. O fascínio em expressar como linguagem matemática a forte ligação dessas oscilações com a indústria musical motivou o desenvolvimento deste trabalho. A atividade de tocar instrumentos, por exemplo, envolve a produção de ondas e paralelamente a isso, a detecção

deste som pelos ouvintes se dá também pela percepção dessas mesmas vibrações [14]. Buscamos, a partir daí, conectar a teoria das Equações Diferenciais com o som produzido por uma corda de violão e suas consequências no manuseio do instrumento.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, nos quais apresentamos definições, resultados, observações e exemplos para facilitarem a compreensão do conteúdo.

No Capítulo 1, apresentamos um breve histórico do surgimento e desenvolvimento das Equações Diferenciais, destacando algum dos grandes colaboradores ao longo do tempo.

No Capítulo 2, apresentamos conceitos básicos e definições sobre as Equações Diferenciais Parciais e, estudamos suas classificações, condições iniciais/contorno e princípio da superposição.

No Capítulo 3, mencionamos de forma sucinta alguns conceitos da Teoria de Séries de Fourier, estudamos sua convergência pontual e apresentamos exemplos para assimilação das noções e propriedades relativas às séries de funções.

No Capítulo 4, estudamos de forma detalhada a Equação de Ondas, apresentamos definições e notas históricas, sua dedução física, obtivemos a solução da Equação usando o método de Fourier e finalizamos apresentando uma aplicação dos conceitos estudados à corda de um violão e suas consequências na música ou até mesmo na afinação do instrumento.

Esperamos que este trabalho possa servir de referência complementar aos estudantes de graduação que desejarem estudar ou se aprofundar no tema.

# Capítulo 1

## Breve História Sobre As Equações Diferenciais

Iniciaremos a discussão do tema proposto neste trabalho apresentando um breve relato histórico da construção das ideias precursoras às Equações Diferenciais e seu desenvolvimento ao longo do tempo.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [5], a conexão entre os conceitos com seu contexto histórico constituem um grande meio para formar um olhar mais crítico, possibilitando uma melhor compreensão.

A história da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento [5].

Cabe ressaltar que a construção dos conceitos envolvendo as Equações Diferenciais deu-se devido às contribuições de diversos matemáticos em diferentes períodos históricos. Cada matemático, ao seu tempo, desenvolveu novas idéias e aperfeiçoou métodos para o estudo e a aplicação das Equações Diferenciais nas mais diversas áreas do conhecimento. Assim, mesmo que o mérito e reconhecimento de algumas descobertas matemáticas recaiam, em muitos momentos, sobre alguns grandes nomes, faz-se necessário reconhecer que esta teoria

é resultante de uma construção de ideias e resultados obtidos por muitos personagens desde os primórdios da humanidade.

Segundo Diacu (2004), a teoria das Equações Diferenciais começou a ser utilizada nas ciências físicas, se abrangendo ao longo do tempo para as demais áreas, desde a engenharia, biologia, medicina, os negócios, até as artes.

A história das Equações Diferenciais se confunde com a história do Cálculo Diferencial e Integral. Os primeiros registros de Cálculo datam de 1.800 a.C., e desde a antiguidade, grandes nomes, como os matemáticos gregos Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C) e Arquimedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C), deram suas contribuições [19]. Algumas ideias do Cálculo também podem ser encontradas em trabalhos do início do século XVI de René Descartes (1569-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Jhon Wallis (1615-1703) e Isaac Barrow (1630-1677) [16]. Mas foi no século XVII, que Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) chegaram, de forma independente, a importantes resultados no campo do Cálculo, e por isso, são considerados os "criadores" do Cálculo.

Para a ciência, a invenção do Cálculo Diferencial foi um passo gigantesco. Pela primeira vez na história humana, a concepção de infinito, que tinha intrigado filósofos e poetas desde tempos imemoriais, tinha recebido uma definição matemática precisa, que abria inúmeras possibilidades novas para a análise dos fenômenos naturais [7].

Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe em 1642. Filho póstumo<sup>1</sup> de agricultor, Newton, pelos planos de sua família, deveria seguir a mesma profissão do pai. Porém, Newton revelou grande habilidade para projetar miniaturas mecânicas. Em uma dessas experiências, "construiu um moinho de brinquedo que triturava o trigo, transformando-o em farinha, usando como força motriz um rato"[8].

Contrariando os planos familiares, Newton dedicou-se aos estudos e aos 18 anos de idade ingressou no Trinity College, em Cambridge, onde seu olhar se voltou para a Matemática. Suas pesquisas eram voltadas para a Mecânica. Segundo Boyce e Diprima (2006), "Suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665".

---

<sup>1</sup>Nascido depois da morte do pai

As descobertas de Newton circulavam privadamente entre seus amigos, mas por ser muito sensível a críticas, Newton só começou a publicar seus resultados a partir de 1687. E foi neste ano que surgiu sua obra mais famosa, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Newton, se apoiando na Mecânica, teve a base para aplicar Equações Diferenciais no século XVIII. Ele classificou as Equações Diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ,  $\frac{dy}{dx} = f(y)$  e  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Foi desenvolvido por ele um método para resolver a última equação em que  $f(x, y)$  é um polinômio em  $x$  e  $y$ , usando séries infinitas.

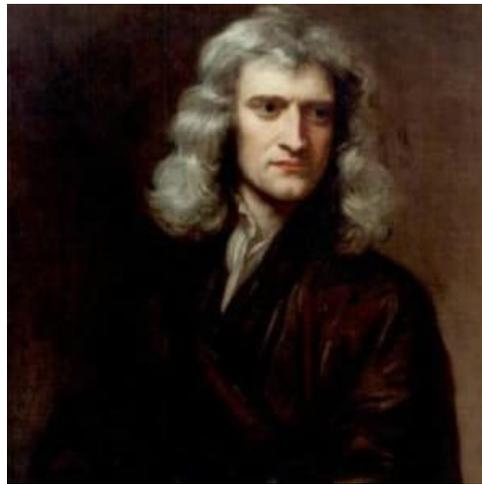


Figura 1.1: Sir. Isaac Newton.  
Fonte: [www.biography.com](http://www.biography.com)

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646 na Alemanha, "onde aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel"[4]. Aos seus vinte anos concluiu seu doutorado na Universidade de Altdorf em Nuremberg. Daí em diante, Leibniz, autodidata em Matemática, chegou aos resultados fundamentais do Cálculo independentemente e um pouco depois de Newton. Porém, foi o primeiro a realizar publicações sobre o conteúdo em 1684. Ele compreendia a importância de um simbolismo geral, mais formal e rigoroso, ou seja, a criação de um cálculo manipulável. A notação para derivada,  $\frac{dy}{dx}$ , e o sinal de integral ( $\int$ ) são devidos a ele. Em relação específica às Equações Diferenciais, Leibniz "descobriu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694"[3].



Figura 1.2: Gottfried Wilhelm Leibniz.  
Fonte: [www.britannica.com](http://www.britannica.com)

Leibniz manteve contato com outros matemáticos através de cartas, o que proporcionou a resolução de muitos problemas em Equações Diferenciais, em especial com os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), nascidos em Basileia na Suíça, os quais contribuíram muito para o desenvolvimento das aplicações das Equações Diferenciais.



Figura 1.3: Jakob Bernoulli.  
Fonte: [www.thefamouspeople.com](http://www.thefamouspeople.com)



Figura 1.4: Johann Bernoulli.  
Fonte: [www.britannica.com/](http://www.britannica.com/)

Segundo Teixeira (2002), Jakob Bernoulli resolveu a Equação Diferencial  $y' = \left[ \frac{a^3}{b^2y - a^3} \right]^{\frac{1}{2}}$  em 1690 e, neste mesmo arquivo, utilizou pela primeira vez a palavra "integral". Em 1694, Johann Bernoulli resolveu a Equação Diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$  e o problema da catenária<sup>2</sup>. Um problema que ambos os irmãos resolveram (e que causou muitos atritos entre eles) foi o problema da braquistócrona<sup>3</sup>, que também foi resolvido por Leibniz, Newton e pelo Guillaume François Antonie Marquis de L'Hôpital (1661 - 1704).

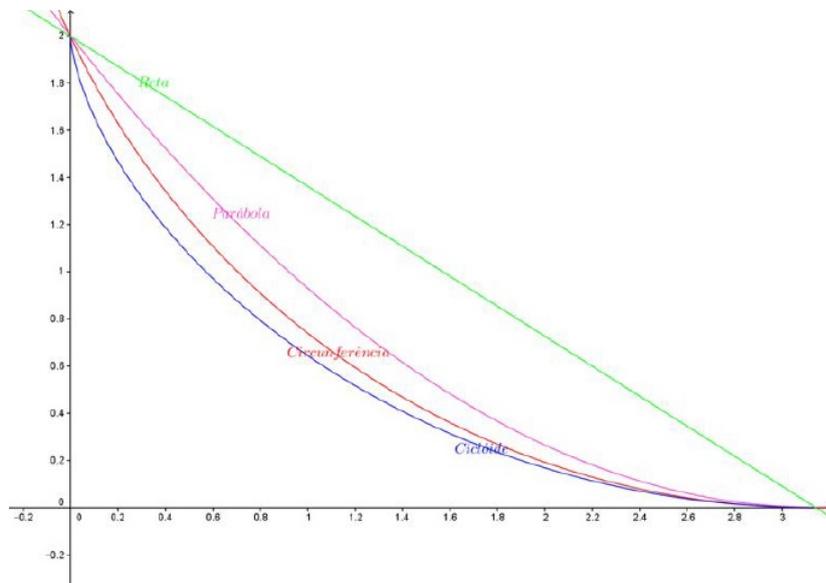


Figura 1.5: Braquistócrona  
Fonte: repositorio.unesp.br

Daniel Bernoulli (1700- 1782) nasceu em Groningen, nos Países Baixos, filho de Johann, se interessava por Equações Diferenciais e suas aplicações, tendo seu nome associado à "Equação de Bernoulli"

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Daniel Bernoulli também foi o primeiro a encontrar funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel [3].

<sup>2</sup>Curva descrita por uma corda apoiada em suas extremidades sob o efeito de seu próprio peso.

<sup>3</sup>Trajectoria de uma partícula que, sob a ação de seu peso, passa de um ponto inicial a um ponto final, num intervalo mínimo de tempo.



Figura 1.6: Daniel Bernoulli.  
Fonte: [www.thefamouspeople.com](http://www.thefamouspeople.com)

Leonhard Euler (1707-1783), nasceu em Basileia na Suíça, considerado o maior matemático do século XVIII, foi aluno de Johann Bernoulli na universidade. Visto como o matemático que mais contribuiu com resultados concretos em todos os tempos, suas obras completas somam mais de 70 volumes. "Entre livros e artigos, Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais 47 anos"[8]. De acordo com Boyce Diprima (2006), Euler identificou a condição para que Equações Diferenciais de primeira ordem sejam exatas, por volta de 1734 - 1735, desenvolveu a teoria de fatores integrantes e encontrou solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743. Em 1750-1751 estendeu este último resultado para equações lineares não homogêneas, usando com frequência séries de potências para resolver Equações Diferenciais. Por volta de 1768-1769, Euler propôs um procedimento numérico e fez contribuições importantes em Equações Diferenciais Parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Segundo Boyer (2009),

Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre Equações Diferenciais, e até muito problemas específicos que aparecem em livros texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo - *Institutiones calculi differentialis* (Petersburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes).

## A Equação Diferencial

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x),$$

em que os expoentes entre parênteses indicam a ordem da derivada, é conhecida atualmente como *Equação Diferencial de Euler*.

Euler também foi o primeiro a notar que, conhecida uma solução particular  $v = f(x)$  da equação  $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$  (Equação de Riccati), a substituição de  $y = v + \frac{1}{z}$  a transforma em uma Equação Diferencial linear em  $z$  [8].



Figura 1.7: Leonhard Euler.  
Fonte: [www.biography.com](http://www.biography.com)

Outro grande matemático que contribuiu de forma significativa a Teoria das Equações Diferenciais foi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange nasceu em Turim na Itália, tornou-se professor de Matemática em Turim e sucedeu Euler na cadeira de Matemática na Academia de Berlim em 1766. Muito conhecido por seu trabalho *Mécanique analytique* em 1788, Lagrange mostrou, no período de 1762-1765, que a solução geral de uma Equação Diferencial linear homogênea de ordem  $n$  é uma combinação linear de  $n$  soluções independentes. Em 1774- 1775 desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros. Sendo também conhecido pelo seu trabalho fundamental em Equações Diferenciais Parciais e cálculo de variações [3].

Seu trabalho em Equações Diferenciais (por exemplo, o método de variação de parâmetros), particularmente em Equações Diferenciais Parciais, é extra-

ordinário, e suas contribuições ao cálculo de variações impulsionaram muito o desenvolvimento desse campo. [8]



Figura 1.8: Joseph-Louis Lagrange.  
Fonte: [www.britannica.com](http://www.britannica.com)

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) viveu na Normandia e depois foi para Paris em 1768 deixando sua marca nos meios científicos, destacando-se no campo da Mecânica Celeste. A equação  $\Delta f = 0$ , conhecida como equação de Laplace, é fundamental em muitos ramos da Física Matemática, foi bastante estudada por ele em conexão com a atração gravitacional. Seu Método de Transformada de Laplace permite resolver uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica.

Para Zill (2003),

Um notório matemático, físico e astrônomo, Laplace foi chamado por alguns de seus contemporâneos de "o Newton da França". Embora Laplace tenha usado a transformada integral em seu trabalho sobre teoria das probabilidades, é mais provável que a integral tenha sido descoberta por Euler. Publicações importantes de Laplace foram os tratados *Mécanique Céleste* e *Théorie Analytique des Probabilités*. Nascido de uma família pobre, Laplace se tornou amigo de Napoleão, mas foi elevado à aristocracia por Luís XVIII após a Restauração.



Figura 1.9: Pierre-Simon de Laplace.  
Fonte: [www.britannica.com](http://www.britannica.com)

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias já tinham sido descobertos e no século XIX, inicia-se a investigação de questões relacionadas a teoria e a unicidade dos problemas. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) alemão e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) francês, deram suas contribuições no desenvolvimento das teorias e conceitos de funções de variáveis complexas. Nessa mesma época as EDP's começaram a ser estudadas, à medida que se tornou claro o seu papel crucial em Física Matemática. Com tudo isso, muitas funções, soluções de certas Equações Diferenciais Ordinárias, começaram a aparecer em muitas situações e foram estudadas mais profundamente. Conhecidas como funções transcendentais, muitas destas funções são associadas a nomes de matemáticos tais como; Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros.

O comportamento das soluções de Equações Diferenciais começou a ser analisado, do ponto de vista geométrico e analítico, a partir do século XX. Com o auxílio da tecnologia computacional, fenômenos descritos por equações desse tipo puderam ser mais explorados. Uma elucidação desse fato é o estudo de fractais, que vem gerando uma gama de problemas de aplicabilidade dessas equações.

Diante do exposto, notamos que o Cálculo Diferencial e Integral - inclusive as Equações Diferenciais - são fruto de um extenso caminho de pesquisa, descobertas e fracassos. Incontáveis foram os matemáticos, reconhecidos ou não, que se envolveram nesse processo de produzir a Matemática que hoje conhecemos e estudamos. Assim, compreendemos que, mesmo sendo um assunto bastante estudado e, por conseguinte, rico em saberes já produzidos, as Equações Diferenciais, ainda hoje, representam um terreno muito produtivo, pois ainda detém incontáveis problemas não resolvidos.

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais Parciais

Grande parte das EDP's surgem de modelos físicos e também de problemas advindos da Geometria Diferencial. Entre diversos exemplos dependentes da análise das EDP's, destacamos alguns deles nas áreas: aerodinâmica, elasticidade, geofísica, circulação de fluidos, transferência de calor e crescimento de tumores.

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições importantes sobre a teoria das EDP's para que tenhamos ferramentas necessárias para o entendimento e desenvolvimento dos problemas relacionados à equação de ondas. Os resultados apresentados nesta seção tem como principais referências [2], [13] e [23].

### 2.1 O Conceito de Equação Diferencial Parcial

**Definição 2.1.1.** Uma **Equação Diferencial (ED)** é uma equação que envolve uma ou mais variáveis dependentes e suas derivadas até uma determinada ordem.

**Definição 2.1.2.** Uma **Equação Diferencial Ordinária (EDO)** é uma Equação Diferencial em que sua variável dependente (ou suas variáveis dependentes) dependem de uma única variável.

**Exemplo 2.1.1.** Em circuitos elétricos, a equação que modela o sistema composto por somente um resistor e um indutor ligados em série, sendo  $L$  e  $R$  constantes conhecidas como indutância e resistência respectivamente, é

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = E(t). \quad (2.1)$$

Note que, neste caso, temos como variável dependente  $i$  e como variável independente  $t$ . Logo, de acordo com a definição anterior, a equação (2.1) é um exemplo de Equação Diferencial Ordinária.

**Definição 2.1.3.** Uma **Equação Diferencial Parcial (EDP)** é uma Equação Diferencial que envolve uma (ou mais de uma) variável dependente de duas ou mais variáveis independentes.

**Exemplo 2.1.2.** A EDP conhecida como Equação de Laplace,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , é muito utilizada no estudo dos campos eletrostáticos, que visa descrever a função potencial num meio dielétrico <sup>1</sup> sem cargas elétricas. Analisando esta equação, temos como variável dependente  $u$  e variáveis independentes  $x, y$ . Portanto, a Equação de Laplace é um exemplo de Equação Diferencial Parcial.

**Definição 2.1.4.** A **ordem** de uma EDP é a ordem da derivada parcial de maior ordem presente na equação.

Assim, uma Equação Diferencial Parcial de ordem  $k$  com uma variável dependente em  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  é uma expressão da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = g(x_1, \dots, x_n), \quad (2.2)$$

em que  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é a variável dependente.

**Exemplo 2.1.3.**

1. Em Matemática Aplicada, a Equação de Burger com viscosidade, descrita por  $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$  modela a dinâmica de gases. Este é um exemplo de EDP de ordem 2.
2. A equação conhecida por Korteweg-de Vries (KdV):  $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$  modela inúmeros fenômenos da mecânica dos fluidos, física de partículas, entre outras coisas. A Equação KdV, é um exemplo de EDP de ordem 3.

**Definição 2.1.5.** Uma **solução** para a EDP (2.2) em  $\Omega$  é uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$  vezes derivável, tal que  $u$  e suas derivadas satisfazem a igualdade (2.2).

<sup>1</sup>Material que dificulta a passagem de corrente elétrica, ou seja, isolante elétrico.

**Exemplo 2.1.4.** A função

$$u(x, y) = e^{-x} \sin(y)$$

é uma solução da Equação de Laplace em  $\mathbb{R}^2$ . De fato, neste caso temos

$$u_x = -e^{-x} \sin(y) \Rightarrow u_{xx} = e^{-x} \sin(y)$$

$$u_y = e^{-x} \cos(y) \Rightarrow u_{yy} = -e^{-x} \sin(y)$$

assim,

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-x} \sin(y) + (-e^{-x} \sin(y)) = e^{-x} \sin(y) - e^{-x} \sin(y) = 0.$$

Portanto, a função  $u(x, y) = e^{-x} \sin(y)$  é uma solução da Equação de Laplace em  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Linearidade

Além da ordem, outra classificação importante das EDP's diz respeito à linearidade ou não da equação. Temos uma teoria matemática bem avançada em se tratando das resoluções das EDP's lineares, porém, a teoria que envolve a resolução das equações não lineares é bem mais complicada e menos precisa.

**Definição 2.2.1.** Chamamos de **parte principal** da Equação Diferencial Parcial a parte da equação que contém as derivadas de maior ordem.

**Definição 2.2.2.** Dizemos que a EDP (2.2) é **linear** se  $F$  é linear em relação a  $u$  e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é **não linear**.

**Definição 2.2.3.** Uma Equação Diferencial linear é dita **homogênea** quando a parcela que não possui a variável dependente é identicamente nula ( $g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ ) em (2.2), caso contrário diremos que a equação é **não-homogênea**.

As Equações Diferenciais Parciais de segunda ordem merecem um destaque maior devido a sua grande aplicabilidade em problemas físicos, por exemplo, em mecânica dos fluidos, movimentos ondulatórios e condução de calor. As equações que descrevem os exemplos citados, estão amparadas por uma teoria bem estruturada e bem desenvolvida com diversos métodos de resolução.

Consideremos a EDP linear de 2ª ordem nas variáveis independentes  $x, y$  e variável dependente  $u = u(x, y)$ , sobre o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , dada por

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \quad (2.3)$$

em que os coeficientes  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  são funções reais que dependem das variáveis  $x, y$ , definidas para todo  $(x, y) \in \Omega$ . Como a EDP é de segunda ordem, devemos ter

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0.$$

Dizemos que a EDP (2.3) é:

1. **Hiperbólica**, se  $B^2 - 4AC > 0$ .
2. **Parabólica**, se  $B^2 - 4AC = 0$ .
3. **Elíptica**, se  $B^2 - 4AC < 0$ .

**Exemplo 2.2.1.** Vamos analisar as seguintes equações:

a)  $3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

- a) Identificando os coeficientes da EDP

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

temos  $A = 3, B = 0$  e  $C = 0$ . Neste caso,  $B^2 - 4AC = 0^2 - 4(3)(0) = 0$ , ou seja,  $B^2 - 4AC = 0$ . Logo, a equação é parabólica.

- b) De modo semelhante, para a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

temos os seguintes coeficientes:  $A = 1, B = 0$  e  $C = -1$ . Substituindo os coeficientes na expressão  $B^2 - 4AC$ , obtemos  $0^2 - 4(1)(-1) = 4$ , ou seja,  $B^2 - 4AC > 0$ . Assim, a equação é hiperbólica.

## 2.3 Problemas de Valor Inicial e de Contorno

De modo geral, as EDP's podem não ter solução ou, até mesmo, possuir infinitas soluções. Segundo Iório (2007), foi provado por H. Lewy <sup>2</sup>, em 1957, que existe uma função  $f$ , tal que a EDP,  $u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f$ , não tem solução. Já no caso da EDP linear homogênea  $u_{xy} = 0$ , para  $x, y \in \mathbb{R}$ , tem-se que todas as funções da forma  $u(x, y) = f(x) + g(y)$ , onde  $f(x)$  e  $g(y)$  são funções quaisquer, são soluções. Entretanto, pode-se impor algumas condições adicionais a fim de garantir a existência e unicidade de soluções.

**Definição 2.3.1.** Um *Problema de Valor Inicial (PVI)*, ou *Problema de Cauchy*, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas de maneira que, umas das variáveis independentes são fixadas em relação à variável dependente e a suas derivadas.

**Exemplo 2.3.1.** Analizando a EDP  $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$ , notamos que sua solução depende do tempo  $t$ , com isso podemos prefixar o que acontecerá na solução  $u(x, t)$  quando  $t = 0$ . Matematicamente, procuramos uma solução que satisfaça a EDP com as duas condições iniciais:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

**Definição 2.3.2.** Um *Problema de Valores de Contorno (PVC)*, ou *Problemas de fronteira*, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo ou fronteira da região ( $\partial\Omega$ ).

**Exemplo 2.3.2.** Tomando como referência a EDP utilizada no Exemplo (2.3.1) aplicada ao problema das cordas vibrantes, representado pela figura (2.1), observamos que esta corda é fixa permanentemente ao eixo  $x$  em  $x = 0$  e  $x = L$ . Portanto, temos como condições de contorno para este problema

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

---

<sup>2</sup>Hans Lewy nasceu no dia 20 de outubro de 1904 em Breslau, hoje Polônia, faleceu em 23 de agosto de 1988. Conhecido por seus trabalhos nos campos de Análise Matemática, Equações Diferenciais Parciais e Variáveis Complexas.

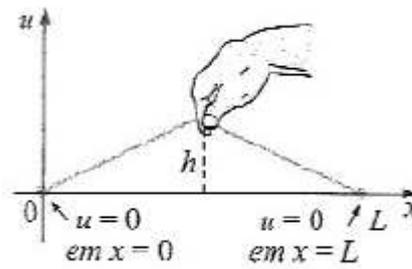


Figura 2.1: corda fixa nas extremidades

Fonte: (ZILL, 2003)

**Exemplo 2.3.3.** O problema que modela o fluxo de calor num fio isolado em toda parte, considerando que suas extremidades sejam mantidas a temperaturas constantes conhecidas, é dado por

$$u_t = K u_{xx}, \quad (2.4)$$

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.6)$$

em que  $K$  é uma constante conhecida, chamada de difusividade térmica <sup>3</sup>.

O problema (2.4)-(2.6) é um exemplo de Problema de Valor Inicial e de Contorno (PVIC), pois temos como condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ , e como condições de fronteira  $u(0, t) = T_1$  e  $u(L, t) = T_2$ ,  $t \geq 0$ .

## 2.4 O Princípio da Superposição

Para EDP's lineares homogêneas, a existência de uma solução não nula, implica diretamente na existência de infinitas soluções. De fato, se  $u$  é uma solução da EDP, então  $ku$  também é solução, para qualquer  $k \in \mathbb{R}$ . Mais geralmente, se uma EDP linear homogênea tem como soluções as funções  $u$  e  $v$ , então todas as combinações lineares de  $u$  e  $v$  também são soluções da EDP. Este resultado, apresentado abaixo, é conhecido como Princípio da Superposição. Vejamos primeiro um exemplo.

<sup>3</sup>Parâmetro que depende somente do material do fio/barra.

**Exemplo 2.4.1.** Consideremos a EDP,

$$u_t - u_{xx} = 0. \quad (2.7)$$

A função  $u(x, t) = \sin(x)e^{-t}$  é solução de (2.7), pois

$$u_t(x, t) = -\sin(x)e^{-t},$$

$$u_x(x, t) = \cos(x)e^{-t} \Rightarrow u_{xx}(x, t) = -\sin(x)e^{-t},$$

assim,

$$u_t - u_{xx} = -\sin(x)e^{-t} - (-\sin(x)e^{-t}) = 0.$$

Agora, consideremos a função  $v(x, t) = e^x e^t$ . Note que  $v$  também satisfaz a equação diferencial (2.7), pois, ao calcularmos as derivadas relativas às variáveis independentes, temos

$$v_t(x, t) = e^x e^t,$$

$$v_x(x, t) = e^x e^t \Rightarrow v_{xx}(x, t) = e^x e^t,$$

daí

$$v_t - v_{xx} = e^x e^t - (e^x e^t) = 0.$$

Novamente, consideremos a função  $z(x, t) = c_1 \sin(x)e^{-t} + c_2(e^x e^t)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Nesse caso, temos

$$z_t - z_{xx} = -c_1 \sin(x)e^{-t} + c_2(e^x e^t) - [-c_1 \sin(x)e^{-t} + c_2(e^x e^t)] = 0.$$

Portanto,  $z(x, t) = c_1 u(x, t) + c_2 v(x, t)$  também é solução da EDP (2.7), para quaisquer constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.4.1.** Consideremos as Equações Diferenciais Parciais descritas em (2.2).

Definimos o *operador diferencial parcial*  $L$  como

$$L[u] = F \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right).$$

Desta forma, a equação (2.2) pode ser escrita como

$$L[u] = g.$$

**Proposição 2.4.1. (Princípio da Superposição)** *Seja  $L$  um operador diferencial linear de ordem  $k$ , cujos coeficientes estão definidos em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$  é um conjunto de funções de classe  $C^k$  em  $\Omega$  satisfazendo a EDP linear homogênea ( $L[u] = 0$ ). Se  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \quad (2.8)$$

*é convergente e  $k$  vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ , então  $u$  satisfaz  $L[u] = 0$ .*

**Demonstração 2.4.1.** Enunciamos a proposição no caso geral mas a demonstraremos no caso em que  $k = 2$ . Seja o operador diferencial parcial dado por

$$L[u](x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x).$$

Neste caso, por hipótese, quaisquer que sejam  $x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n$ , temos que as séries

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j},$$

são convergentes. Assim, para todo  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} L[u](x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x) u_m(x) \right] = \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (L[u_m])(x) = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é solução do operador  $L$ .

■

# Capítulo 3

## Séries de Fourier

Neste capítulo, será discutida a Teoria das Séries de Fourier, que nos possibilita expressar uma função como uma série infinita de senos e/ou cossenos. Essas séries trigonométricas nos auxiliam a representar funções bastante complicadas em termos de funções elementares bem conhecidas.

As Séries de Fourier surgiram em meados do século XIX, quando Joseph Fourier <sup>1</sup> (1768 - 1830) analisava o problema de condução de calor na era da revolução industrial, cuja questão de dissipação de calor era algo de grande relevância neste contexto. Diante deste problema, "a dificuldade de representação de uma função por uma série trigonométrica é colocada em termos mais claros"[10], descrevendo assim, a solução de forma mais precisa e eficiente desse problema, impulsionando, portanto, um método de resolução das EDP's de segunda ordem lineares.

### 3.1 Conceitos preliminares

Nesta seção, iremos destacar alguns conceitos e propriedades preliminares fundamentais para um bom entendimento das Séries de Fourier, embasados nas seguintes referências [3] e [10].

**Definição 3.1.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **periódica** de período  $T \neq 0$  se  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O menor valor positivo de  $T$  é chamado de **período**

---

<sup>1</sup>Joseph B. J. Fourier (1768-1830) desenvolveu na série, que leva seu nome, para resolver problemas de fluxo de calor. Lagrange expressou dúvidas sobre a validade da representação, mas Dirichlet criou condições que garantiram sua convergência.

**fundamental** de  $f$ .

Por exemplo, as funções trigonométricas  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  são funções periódicas com período fundamental  $2\pi$ . Já  $\tan(x)$  é uma função periódica com período fundamental igual a  $\pi$ .

**Definição 3.1.2.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $f$  é dita **par** se satisfaz as seguintes condições:

1.  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ ,
2.  $f(x) = f(-x), \forall x \in D$ .

Observe que, se  $f$  é par, então seu gráfico é simétrico em relação ao eixo  $y$ .

**Definição 3.1.3.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $f$  é dita **ímpar** se satisfaz as condições:

1.  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ ,
2.  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ .

Observe que, se  $f$  é ímpar, então a simetria de seu gráfico se dá em relação à origem.

A soma (diferença) e o produto (quociente) de funções pares e ímpares possuem propriedades importantes. Essas propriedades elementares são as seguintes:

- s1 - A soma (diferença) de duas funções pares é par;
- s2 - A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar;
- s3 - A soma (diferença) de uma função par com uma função ímpar, não é nem par nem ímpar;
- p1 - O produto (quociente) de duas funções pares é par;
- p2 - O produto (quociente) de duas funções ímpares é par;
- p3 - O produto (quociente) de uma função par com uma função ímpar é ímpar.

Demonstraremos para o caso (p2), pois, as demonstrações das demais afirmações são simples e segue diretamente das definições.

Sejam  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções ímpares, ou seja,  $f_1(-x) = -f_1(x)$  e  $f_2(-x) = -f_2(x)$ . Tomando o produto  $h(x) = f_1(x)f_2(x)$  segue que

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x) = h(x).$$

Portanto, mostramos que  $h(x) = h(-x)$ , logo este produto é par. Agora, assumindo o quociente  $q(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ , temos

$$q(-x) = \frac{f_1(-x)}{f_2(-x)} = \frac{-f_1(x)}{-f_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = q(x),$$

assim, mostramos que  $q(x) = q(-x)$ , logo este quociente é par.

**Definição 3.1.4 (Funções Ortogonais).** Sejam  $f_1$  e  $f_2$  funções reais de uma variável real, definidas no intervalo  $[a, b]$ . Dizemos que  $f_1$  e  $f_2$  são *ortogonais* se

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0.$$

**Proposição 3.1.1. (Relações de ortogonalidade em  $[-L, L]$ .)** Sejam  $m, n \in \mathbb{R}$ .

Assim:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1; \quad (3.1)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 2L, & \text{se } n = m = 0 \\ L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m; n, m \geq 1 \end{cases}; \quad (3.2)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m; n, m \geq 1 \end{cases}. \quad (3.3)$$

**Demonstração 3.1.1.** Temos

$$\cos(n+m) = \cos(n)\cos(m) - \sin(n)\sin(m), \quad (3.4)$$

$$\cos(n-m) = \cos(n)\cos(m) + \sin(n)\sin(m). \quad (3.5)$$

Subtraindo (3.4) de (3.5), obtemos

$$\cos(n-m) - \cos(n+m) = 2\sin(n)\sin(m),$$

assim,

$$\sin(n) \sin(m) = \frac{\cos(n-m) - \cos(n+m)}{2}. \quad (3.6)$$

Usando a fórmula (3.6) para calcular a integral em (3.3), obtemos

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx;$$

se  $n \neq m$ , então

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{(n+m)\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{(n-m)\pi} 2 \sin((n-m)\pi) - \frac{L}{(n+m)\pi} 2 \sin((n+m)\pi) \right] = 0; \end{aligned}$$

se  $n = m$ , então

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \left( \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \cos\left(\frac{(n-n)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+n)\pi x}{L}\right) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ x \Big|_{-L}^L - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2L - \frac{L}{2n\pi} 2 \sin(2n\pi) \right] = L. \end{aligned}$$

As relações de ortogonalidade (3.1) e (3.2) são demonstradas de forma análoga.

## 3.2 Série de Fourier

**Definição 3.2.1.** Seja  $f$  uma função real contínua por partes definida no intervalo  $[-L, L]$ .

A **série de Fourier** de  $f$  é a série trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (3.7)$$

em que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

A motivação para a definição dos coeficientes de uma Série de Fourier vem do fato de que se uma função  $f = f(x)$  puder ser expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (3.10)$$

de forma que a série convirja uniformemente, então, integrando ambos os lados de (3.10) obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

daí

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx = a_0 L \quad (3.11)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (3.12)$$

pois

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (3.13)$$

Multiplicando (3.10) por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ,  $m \geq 1$  e integrando, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ &+ b_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Usando as relações de ortogonalidade, segue que:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_n L,$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Analogamente, multiplicando os dois membros da igualdade de (3.10) por  $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  e integrando, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_n L,$$
$$\therefore b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Neste caso, usamos a notação

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (3.14)$$

onde o símbolo  $\sim$  significa que nem sempre a série que está associada a  $f(x)$  converge para todo  $x \in [-L, L]$ , podendo até mesmo divergir.

**Exemplo 3.2.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\pi$ , definida por

$$f(x) = x^2, \text{ para } -\pi \leq x \leq \pi, \quad (3.15)$$

cujo gráfico, está representado abaixo.

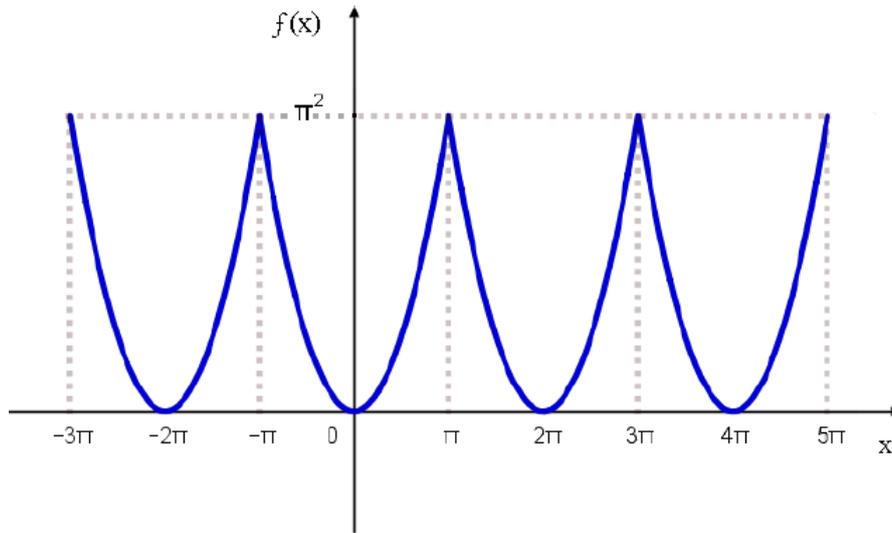


Figura 3.1: gráfico de  $f(x)$ .

Queremos determinar a Série de Fourier da função  $f$ . Iremos, inicialmente, calcular os coeficientes  $a_0, a_n$  e  $b_n$ .

Neste caso, temos que:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{2\pi^2}{3}. \quad (3.16)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(mx) dx. \quad (3.17)$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx, \\ dv = \cos(mx) dx &\Rightarrow v = \frac{\sin(mx)}{m}, \end{aligned}$$

obtemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \left( x^2 \frac{\sin(mx)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin(mx)}{m} \right) 2x dx \right),$$

portanto,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin(mx)}{m} dx.$$

Integrando por partes mais uma vez e, considerando

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx, \\ dv = \frac{\sin(mx)}{m} &\Rightarrow v = -\frac{\cos(mx)}{m^2} dx. \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin(mx)}{m} dx = -\frac{2}{\pi} \left[ -x \frac{\cos(mx)}{m^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(mx)}{m^2} dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi \cos(m\pi)}{m^2} - \frac{(-\pi) \cos(-m\pi)}{m^2} + \frac{1}{m^2} \sin(mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(m\pi) + \cos(-m\pi)}{m^2} \right] \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_n = \frac{4(-1)^m}{m^2}$$

Calculando o coeficiente  $b_n$  e sabendo que o produto de uma função par por uma função ímpar resulta em uma função ímpar, segue que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) dx = 0. \quad (3.18)$$

Substituindo os coeficientes encontrados, temos que a Série de Fourier que representa a função  $f(x) = x^2$  é

$$f(x) \sim \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4(-1)^n}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) + 0 \sin\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) \right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2} \cos(mx).$$

Portanto,

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

### 3.3 Convergência pontual da Série de Fourier

Um dos maiores problemas das Séries de Fourier consiste em saber se a Série de Fourier de uma função  $f$  converge ou não para  $f$ . Nesta seção, demonstraremos somente uma condição suficiente de convergência pontual. Para maiores detalhes e aprofundamento consultar [10].

**Definição 3.3.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *seccionalmente contínua* se possui apenas um número finito de descontinuidades de salto em qualquer intervalo limitado, em outras palavras, se dados  $a < b$ , existem  $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , e existem limites laterais

$$f(x+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(x-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x). \quad (3.19)$$

**Definição 3.3.2.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *seccionalmente diferenciável* se for seccionalmente contínua e se sua derivada,  $f'$ , for também seccionalmente contínua.

**Teorema 3.3.1. (Teste de Dini).** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e  $\mathbf{L}^1$  em  $[-L, L]$ . Fixado  $x$ , em  $[-L, L]$ , suponha que  $f(x+)$  e  $f(x-)$  existam e que exista  $\eta > 0$  tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (3.20)$$

*Então,  $e_n(x) \rightarrow 0$ , ou seja,  $s_n(x) \rightarrow [f(x+) + f(x-)]/2$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10].

**Teorema 3.3.2. (Teorema de Fourier)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$ , dada em (3.14), converge, em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ , isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (3.21)$$

**Demonstração 3.3.1.** Considere  $f(y)$  sendo uma função de  $[-L, L]$ . Fazendo as devidas substituições dos coeficientes de Fourier e algumas manipulações, segue que

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

tal que

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) dy, \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right) dy.$$

Iremos externar estimativas

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Temos que

$$s_n(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left[ \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) + \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right) \right] dy \right\}.$$

Usando, em seguida, a identidade trigonométrica  $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$  encontramos

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) f(y) dy \Rightarrow \\ s_n(x) &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A expressão

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.23)$$

é conhecida como **Núcleo de Dirichlet** e satisfaz as seguintes propriedades:

- 1)  $D_n$  é uma função par.
- 2)  $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$ .
- 3)  $D_n$  é uma função contínua.
- 4)  $D_n$  é uma função periódica de período  $2L$ .
- 5)  $D_n(0) = \frac{(n+\frac{1}{2})}{L}$ .

6) Vale a seguinte expressão compacta de  $D_n(x)$ , para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$  :

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}. \quad (3.24)$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10].

Partindo de (3.22), utilizando (3.23) e (3.24) e, em seguida, reescrevendo a variável independente  $y = x - t$ , obtemos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t)f(x-t)dt. \quad (3.25)$$

Como  $D_n$  e  $f$  são periódicas de período  $2L$ , a soma parcial  $s_n$  pode ser reescrita como

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt. \quad (3.26)$$

Usando o fato de que  $D_n(t)$  é uma função par, temos que

$$s_n(x) = \int_{-L}^0 D_n(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt = \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (3.27)$$

Portanto, obtemos a seguinte expressão para  $e_n$

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) \{ [f(x+t) - f(x+)] + [f(x-t) - f(x-)] \} dt. \quad (3.28)$$

Suponhamos que  $f$  seja uma função seccionalmente contínua, então, existem as derivadas laterais em cada ponto  $x$ ,

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right] \quad \text{e} \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[ \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right], \quad (3.29)$$

Assim, temos que as razões

$$\left[ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right],$$

são limitadas para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Nestas condições, mostraremos que a

condição de Dini é satisfeita, isto é, que fixando  $x \in [-L, L]$  existe um  $\eta > 0$  tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty, \quad (3.30)$$

onde

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x)] + [f(x-t) - f(x)]. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta \left| \frac{[f(x+t) - f(x)] + [f(x-t) - f(x)]}{t} \right| dt \\ & \leq \int_0^\eta \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt + \int_0^\eta \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t} dt. \end{aligned}$$

Basta então mostrarmos que

$$\int_0^\eta \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt \quad \text{e} \quad \int_0^\eta \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t} dt$$

existem, ou que são integráveis.

Suponhamos que,  $f'$  seja uma função contínua em uma vizinhança de um ponto  $x$  fixado, assim,  $g_1(x, t) = \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t}$  será contínua em  $(0, \eta]$  para  $\eta$  suficientemente pequeno. Como  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} g_1(x, t)$  existe por hipótese, então  $g_1(x, t)$  é uma função contínua em todo o intervalo  $(0, \eta]$ . Assim, neste caso  $g_1(x, t)$  é integrável. Agora, suponhamos que no mesmo ponto fixo  $x$ ,  $f'$  tenha descontinuidade de primeira espécie, ou seja, os limites laterais existem, porém, são diferentes.

Segue que,  $g_1(x, t) = \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t}$  será contínua em  $(0, \eta]$  para  $\eta$  suficientemente pequeno. Como  $f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(x, t)$  existe, então  $g_1(x, t)$  é uma função contínua em todo o intervalo  $(0, \eta]$ . Portanto,  $g_1(x, t)$  é integrável.

Desta mesma maneira, conseguimos mostrar que  $g_2(x, t)$  é integrável. Logo, a condição do teste de Dini é satisfeita.

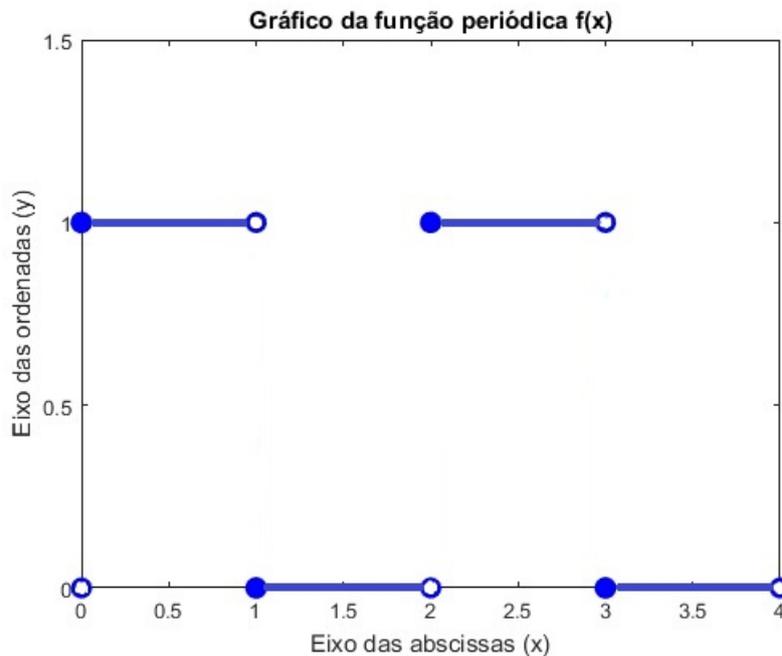
Portanto, concluímos que a igualdade

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

se verifica. ■

**Exemplo 3.3.1.** Calcule a Série de Fourier da função periódica de período 2 definida em  $[0, 2[$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 0, & \text{se } x \in [1, 2[ \end{cases}$$



Como  $T = 2$  e a função é integrável em  $[0, 2]$ , inicialmente, calcularemos os coeficientes da série

$$\bullet a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 0 dx = 1$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = \left[\frac{\sin(m\pi x)}{m\pi}\right]_0^1 = 0$$

$$\bullet b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = \left[-\frac{\cos(m\pi x)}{m\pi}\right]_0^1 = \frac{1 - (-1)^m}{m\pi}$$

Assim,

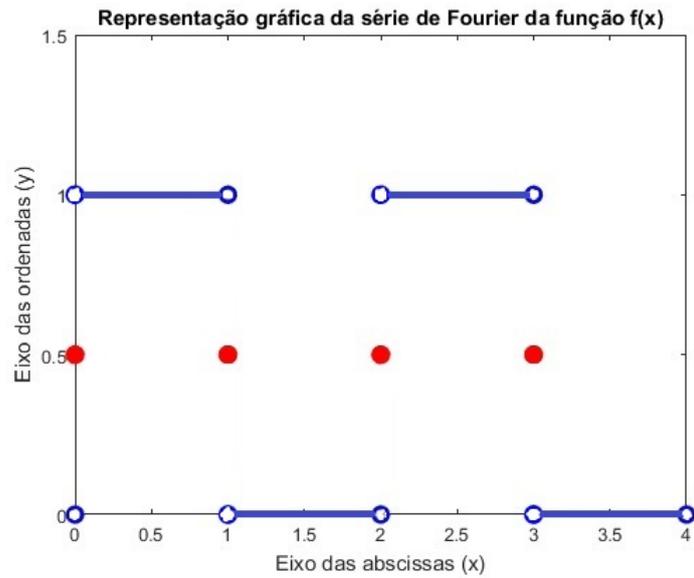
$$b_n = \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ é par} \\ \frac{2}{m\pi}, & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim, a série de Fourier de  $f$  é

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1}.$$

A função  $f$  satisfaz as hipóteses do teorema (3.3.2) de Fourier, então, a série converge para  $f(x)$  se  $x$  é um valor não inteiro e converge para  $\frac{1}{2}$  se  $x$  for inteiro. Logo,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1}, \quad \forall x \in [0, 2[.$$



# Capítulo 4

## A Equação de Ondas

A Equação de Ondas é uma Equação Diferencial Parcial de segunda ordem, linear e hiperbólica, dada por

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}. \quad (4.1)$$

Ela descreve fenômenos que envolvem a propagação de ondas em um meio contínuo. As ondas são classificadas em três tipos: ondas mecânicas, eletromagnéticas e materiais. As ondas mecânicas, governadas pelas leis de Newton, são encontradas em ondas do mar, ondas sísmicas e sonoras. As ondas eletromagnéticas não necessariamente se propagam em meios materiais e, estas estão presentes nos raios ultravioletas, raio X, microondas, etc. Já as ondas materiais, ligadas às partículas fundamentais, são voltadas para o campo quântico e tecnologias modernas.

Em relação à direção de propagação, as ondas são classificadas como unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. As unidimensionais se propagam em apenas uma direção, como por exemplo, em cordas e em molas, as bidimensionais se propagam por uma superfície, como as águas de um lago após uma pedra lançada em seu interior, e as tridimensionais se propagam em todas as dimensões; um exemplo desta é a propagação da luz.

A Equação de Ondas surgiu em meados do século XVIII e foi um dos grandes problemas em destaque da época. Estudada primeiramente por D'Alembert,<sup>1</sup> foi também objeto de estudo de outros grandes matemáticos como Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange.

D'Alembert e Euler concluíram que a solução da Equação de Ondas deveria ser da forma

$$u(x, t) = F(x + \alpha t) + G(x - \alpha t),$$

em que  $F$  e  $G$  são funções reais. Já Bernoulli apresentou como solução a função descrita por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \cos(n\alpha t).$$

Mais tarde, Lagrange afirmou que a solução da Equação de Onda para uma corda de comprimento 1, posição inicial dada por  $f(x)$  e velocidade inicial  $g(x)$  seria

$$u(x, t) = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y) \cos(n\pi\alpha t) f(y) dy + 2 \int_0^1 \frac{1}{n} \sin(n\pi y) \sin(n\pi x) \sin(n\pi\alpha t) dy.$$

Por mais de duas décadas foram discutidos a aplicabilidade entre as duas primeiras soluções apresentadas, bem como a natureza e tipos das funções que poderiam ser utilizadas. A solução descrita por Lagrange se encaixava no modelo descrito por Euler. Alguns anos depois, Fourier explicitou os coeficientes, afirmou que qualquer função poderia ser representada por séries trigonométricas e, mesmo não sendo verdade para todos os casos, teve o reconhecimento em apresentar uma função na forma de série, e por isso esta representação recebeu seu nome.

## 4.1 Dedução

Considere uma corda perfeitamente elástica, flexível, bem esticada entre suportes fixos no mesmo nível horizontal.

---

<sup>1</sup>Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um dos mais importantes cientistas da França do século XVIII. Dentre várias contribuições, como por exemplo, o estudo do equilíbrio e movimento dos fluidos, em 1747 em um de seus trabalhos dedicados às cordas vibrantes, levou-o à Equação Diferencial Parcial  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , tornando-se um dos pioneiros no estudo dessas equações.

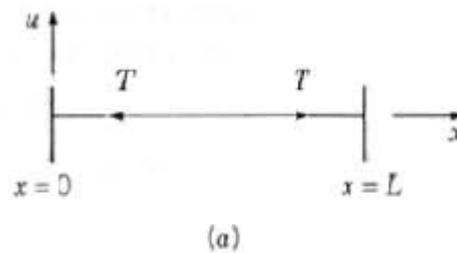


Figura 4.1: corda elástica sob tensão.

Fonte: (BOYCE, 2006)

Suponha que a corda está no eixo dos  $x$  com suas extremidades em  $x = 0$  e  $x = L$ . Se a corda for colocada em movimento em algum instante inicial  $t = 0$ , sendo puxada e depois é deixada sem ser perturbada, por exemplo, ela vibrará livremente em um plano vertical, desde que esteja livre de forças externas. Para determinar a equação diferencial que governa esse movimento iremos considerar as forças que agem em um pequeno trecho de comprimento  $\Delta x$  de corda, entre os pontos  $x$  e  $x + \Delta x$ . Vamos supor que o movimento

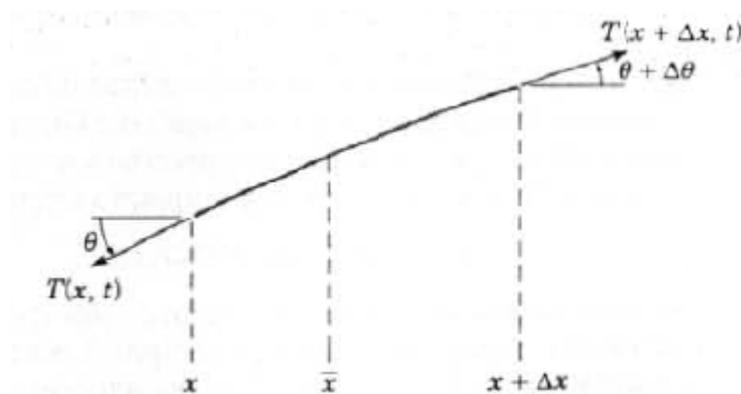


Figura 4.2: trecho da corda deslocada.

Fonte: (BOYCE, 2006)

da corda é pequeno e, como consequência, cada ponto na corda só se move em uma reta vertical. Denotaremos por  $u(x, t)$  o deslocamento vertical no ponto  $x$  no instante  $t$ . Denotaremos também por  $T(x, t)$  a tensão da corda, que sempre age na direção tangente e por  $\rho$  a massa da corda por unidade de comprimento. Quando aplicamos a lei de Newton ao elemento  $\Delta x$  da corda, dizemos que a força externa total, referente à tensão nas extremidades do elemento, será igual ao produto da massa no trecho pela aceleração de seu centro de massa. Como não há aceleração horizontal, as componentes horizontais

têm que satisfazerem a seguinte igualdade

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cos(\theta) = 0. \quad (4.2)$$

Assumindo a componente horizontal de tensão por  $H$ , a equação (4.2) diz que  $H$  é independente de  $x$ . Agora, a respeito das componentes verticais, será satisfeita a equação abaixo.

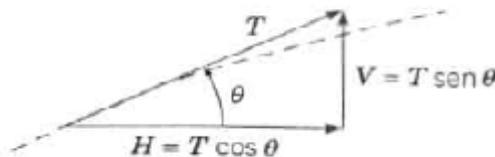


Figura 4.3: resolução da tensão  $T$  em componentes.

Fonte: (BOYCE, 2006)

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta) = \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t), \quad (4.3)$$

sendo  $\bar{x}$  a coordenada de centro de massa do trecho da corda considerada. Como  $\bar{x}$  está compreendido no intervalo  $x < \bar{x} < x + \Delta x$ . Desprezando o peso da corda que age verticalmente para baixo na equação (4.3). E se denotarmos como  $V$  a componente vertical de  $T$ , então iremos reescrever a equação (4.3) como

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t).$$

Tomando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$  temos

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \quad (4.4)$$

Observe que, para expressármos a expressão (4.4) somente em função de  $u$ , note que  $V(x, t) = H(t) \tan(\theta) = H(t) u_x(x, t)$ , deste modo, podemos expressar a equação (4.4) somente em função de  $u$ , daí

$$(H u_x)_x = \rho u_{tt}.$$

Como  $H$  independe de  $x$

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt}. \quad (4.5)$$

Para movimentos pequenos da corda, podemos considerar  $H = T \cos(\theta)$  como  $T$ . Assim, reescrevemos a equação (4.5) da seguinte forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad (4.6)$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (4.7)$$

obtendo, portanto, a Equação de Ondas no espaço unidimensional. Como  $T$  tem unidades de força e  $\rho$  de massa por comprimento, segue que  $\alpha$  tem unidades de velocidade, ou seja,  $\alpha$  é a velocidade pela qual uma pequena perturbação se move ao longo da corda. De acordo com a equação (4.7), a velocidade da onda é diretamente proporcional à tensão e inversamente proporcional à densidade do material composto pela corda.

**Definição 4.1.1.** A frequência de vibração de uma corda tensionada, medida em ciclos por segundo, é dada por

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (4.8)$$

onde um ciclo por segundo é denominado por um Hertz (Hz).

## 4.2 Resolução por Séries de Fourier

Suponhamos que a corda seja perturbada da sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberada com velocidade nula no instante  $t = 0$ , de modo a vibrar livremente. Deste modo, o deslocamento vertical  $u$  deve satisfazer o problema de valor inicial e de contorno descrito abaixo

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.9)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.10)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4.11)$$

$$u_t(x, 0) = g(x). \quad (4.12)$$

Utilizaremos o método conhecido como **Método de Separação de Variáveis**, que consiste, basicamente, em procurar soluções de (4.9) na forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , em que  $X$  é uma função que depende somente da variável  $x$  e  $T$  é uma função que depende somente da variável  $t$ . Nesse caso, substituindo  $u$  em (4.9), obtemos

$$X(x)T''(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0 \end{cases}.$$

Inicialmente, vamos resolver a EDO  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ . Essa EDO é linear homogênea com coeficientes constantes cuja equação característica é  $r^2 + \lambda = 0$ .

Se  $\lambda \leq 0$  deparamos com uma incompatibilidade segundo as condições de contorno, resultando em soluções triviais. Adotando  $\lambda > 0$ , segue que

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i\sqrt{\lambda} \\ r_2 = -i\sqrt{\lambda} \end{cases}.$$

Logo,

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

é a solução geral desta EDO. Utilizando as condições de contorno  $X(0) = X(L) = 0$ , obtemos

$$X(0) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

e

$$X(L) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Rightarrow_{c_2 \neq 0} \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0.$$

Logo,

$$\sqrt{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, temos o que chamamos de autovalores, os  $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$  com  $n = 1, 2, 3, \dots$  e suas autofunções correspondentes dadas por

$$X_n(x) = c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2}} x \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.13)$$

assumindo  $c_2 = 1$ , tem-se

$$X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.14)$$

Substituindo o valor  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$  na EDO  $T''(t) + \lambda\alpha^2T(t) = 0$  obtemos

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2T(t) = 0.$$

Sendo  $\alpha$  uma constante real positiva, temos para cada  $n \in \mathbb{N}$  a solução da EDO

$$T_n = a_n \cos\left(\alpha\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}t\right) + b_n \sin\left(\alpha\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}t\right). \quad (4.15)$$

Assim, as soluções da equação (4.9) que satisfazem as condições de contorno (4.10) são

$$u_n(x, t) = \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.16)$$

logo, pelo Princípio da Superposição

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (4.17)$$

é também solução de (4.9) sujeito às condições (4.10). Resta, então, encontrarmos quais devem ser os valores das constantes  $a_n$  e  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando a condição inicial em (4.17), temos

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha 0}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi\alpha 0}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &\Rightarrow u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

logo,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

Em seguida, para encontrarmos  $b_n$ , vamos derivar (4.17) termo a termo em relação a

$t$  e aplicar a condição inicial (4.12). Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \frac{n\pi\alpha}{L} \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n \frac{n\pi\alpha}{L} \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \frac{n\pi\alpha}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Utilizando das propriedades da Série de Fourier e isolando  $b_n$ , segue que

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.21)$$

Portanto, temos como solução do PVIC (4.9 – 4.12) a função (4.17), onde seus coeficientes são determinados por (4.19) e (4.21).

**Observação 1:** Ao solucionarmos esse PVIC da forma acima, utilizando o Método de Separação de Variáveis, nota-se uma certa negligência por nossa parte, devido a falta de rigor com o método utilizado. Como não foi feita nenhuma hipótese sobre as funções  $f$  e  $g$ , não podemos garantir ou até mesmo provar que, de fato, a função (4.17) será a nossa solução formal.

Como não foi imposto condições em  $f$  e  $g$ , como por exemplo, em que situações as igualdades (4.18) e (4.20) ocorrem, podemos, então, apenas considerar que a função (4.17), onde seus coeficientes são determinados por (4.19) e (4.21), será simplesmente uma candidata à solução do PVIC (4.9) – (4.12).

**Teorema 4.2.1.** *Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções dadas em  $[0, L]$  tais que  $f, f', f'', g, g'$  sejam contínuas e  $f'''$  e  $g''$  são seccionalmente contínuas. Além disso, suponha que  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ . Então*

- (i)  $a_n$  e  $b_n$  estão bem definidos por (4.19) e (4.21), respectivamente;
- (ii) as igualdades (4.18) e (4.20) ocorrem;
- (iii) a expressão (4.17) define uma função contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ , de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$ , que satisfaz à equação das ondas em  $\mathcal{R}$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10].

Comentários sobre as hipóteses do Teorema 4.2.1: Neste teorema, segundo Figueiredo (2005), para que se possa garantir a existência da solução do PVIC (4.9) – (4.12), as condições iniciais precisam satisfazer hipóteses de diferenciabilidades muito fortes, porém, as hipóteses não são satisfeitas para condições iniciais  $f$  e  $g$  que descrevem problemas de interesse físico. Por isso, mesmo nos casos em que  $f$  e  $g$  não são de classe  $C^1$  devemos falar em solução (e logo, há necessidade de se ampliar o conceito de solução).

Observação 2: As funções

$$u_n(x, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right), \quad (4.22)$$

encontradas pelo método de resolução acima, são chamadas de ondas estacionárias, pois, se tomarmos  $\frac{n\pi x}{L} = k\pi$ , ou seja,  $x = \frac{kL}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , e substituindo esses valores de  $x$  em  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  segue que  $\sin\left(\frac{n\pi kL}{L n}\right) = \sin(k\pi) = 0$ . Assim, durante a vibração da corda somente esses pontos descritos pela função  $u_n$  permanecerão parados. Esses pontos são denominados por *nós*. Já os pontos médios entre dois nós consecutivos são chamados de *ventres* da onda estacionária. Definimos também como *comprimento de onda* o dobro da distância entre dois nós, deste modo, o comprimento de onda da função  $u_n$  é  $\lambda = \frac{2L}{n}$ .

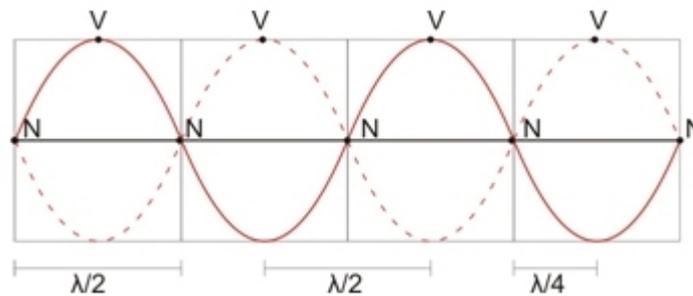


Figura 4.4: elementos da onda estacionária

Fonte: (www.infoescola.com)

A função  $u_n$  é também chamada de  $n$ -ésimo *harmônico*, sendo o primeiro harmônico denominado por *harmônico fundamental*.

### 4.3 A Equação de Ondas e a corda de violão

Nesta seção, iremos analisar o modelo (ideal) do comportamento que ocorre quando se dedilha as cordas de um instrumento como um violão. As configurações deste comportamento são descritas pela função  $u(x, t)$ , solução do PVIC (4.9), com condições iniciais

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{a}, & \text{para } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{h(x-L)}{a-L}, & \text{para } a \leq x \leq L \end{cases} \quad (4.23)$$

$$g(x) = 0. \quad (4.24)$$

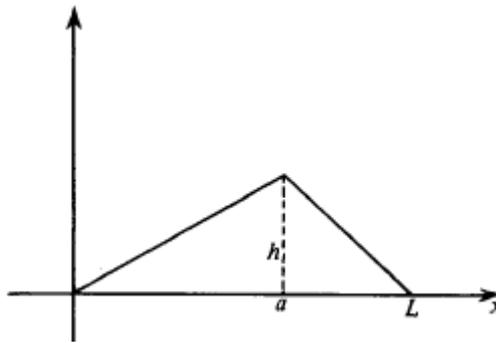


Figura 4.5: corda dedilhada.

Fonte: (FIGUEIREDO, 2005)

Diante disso, partindo da explanação realizada na seção anterior, por mais que as condições iniciais não satisfaçam as hipóteses citadas no Teorema 4.2.1, o PVIC (4.9 – 4.12), é visto fisicamente, diante de sua aplicação na fabricação e manuseio de instrumentos musicais, de suma importância [10]. Assim, consideramos a solução para o PVIC

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (4.25)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{hx}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h(x-L)}{a-L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (4.26)$$

e

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (4.27)$$

pois,  $g(x) = 0$ . Calculando as integrais do coeficiente de Fourier  $a_n$ , separadamente, utilizando integração por partes e assumindo  $u = \frac{hx}{a}$  e  $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^a \frac{hx}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{2}{L} \left[ -\frac{hx}{a} \cdot \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^a + \frac{Lh}{n\pi a} \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \\ &= \frac{2}{L} \left[ -\frac{hLa}{an\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{Lh}{n\pi a} \cdot \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right] = \\ &= \frac{-2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2hL}{an^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Calculando a segunda integral do coeficiente  $a_n$  através do mesmo método de integração utilizado acima, com  $u = \frac{h(x-L)}{a-L}$  e  $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h(x-L)}{a-L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \\ &= \frac{2}{L} \left[ -\frac{h(x-L)}{a-L} \cdot \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_a^L + \frac{hL}{n\pi(a-L)} \int_a^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \\ &= \frac{2}{L} \left[ \frac{h(a-L)}{(a-L)} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{hL^2}{n^2\pi^2(a-L)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right] = \\ &= \frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2hL}{n^2\pi^2(a-L)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Deste modo, podemos reescrever o coeficiente  $a_n$  através da soma de (4.28) e (4.29)

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2hL}{an^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2hL}{n^2\pi^2(a-L)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \\ \Rightarrow a_n &= \left( -\frac{2h}{n\pi} + \frac{2h}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \left( \frac{2hL}{an^2\pi^2} - \frac{2hL}{n^2\pi^2(a-L)} \right) \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \\ \Rightarrow a_n &= \frac{2hL}{n^2\pi^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a-L} \right) \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Portanto, a função que descreve os  $n$ -ésimos harmônicos de uma corda dedilhada será

$$u_n(x, t) = \frac{2hL}{n^2\pi^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a-L} \right) \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) \quad (4.31)$$

Segundo Figueiredo (2005), podemos entender o som produzido pelas vibrações de uma

corda como uma superposição de harmônicos, e logo, várias propriedades físicas desse som dependem de parâmetros que aparecem nas expressões de  $u_n$ .

Observando a função (4.31) que modela o movimento transversal da corda dedilhada em um determinado tempo, temos que a intensidade do som está ligada à amplitude das vibrações e, esta amplitude é representada pela magnitude da oscilação de uma onda. Portanto, quanto maior for a amplitude, mais forte será o som produzido pela corda e, se esta amplitude for pequena, teremos o que chamamos de som fraco ou baixo.

A escolha do ponto  $a$  onde se dedilha a corda também tem grande interferência no conjunto dos harmônicos produzidos, por exemplo, se considerarmos que  $a$  seja um ponto de nó dos  $n$ -harmônicos, ou seja,  $a = \frac{KL}{n}$ ;  $K \in \mathbb{Z}$ , temos que alguns harmônicos podem estar ausentes ou mudos, pois ao substituirmos este valor de  $a$  em (4.31) encontramos  $u_n(x, t) = 0$ .

Outro fato que podemos analisar é em relação a frequência das ondas produzidas, pois, a frequência é inversamente proporcional ao comprimento  $L$  da corda, assim, quanto maior o comprimento da corda, menor será a frequência, ou seja, o som será mais grave e, quanto menor for este comprimento, maior será a frequência resultando em um som mais agudo. Como consequência disso, músicos ao pressionarem as cordas do violão por exemplo, buscam um comprimento de corda  $L_1 < L$  gerando conseqüentemente sons mais agudos.

Além disso, tomando como referência a frequência definida em (4.8), quanto maior a tensão da corda, maior a altura do som. Este fato é utilizado pelos músicos na afinação dos instrumentos de corda em geral, apertando ou afrouxando as tarrachas do instrumento.

# Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos um estudo histórico acerca das Equações Diferenciais, no qual destacamos alguns dos grandes matemáticos que contribuíram de forma significativa no desenvolvimento desta teoria. Além disso, buscamos, nas bibliografias, reunir, de forma clara, os principais conceitos e resultados relacionados à teoria das Equações Diferenciais Parciais. Aqui, também expomos de forma sucinta, o conceito das Séries de Fourier de modo a nos servir de ferramenta na resolução de problema envolvendo a Equação de Ondas.

De modo geral, estivemos interessados no estudo da Equação de Ondas, sobre a qual apresentamos um estudo histórico, sua dedução física e a "ligação" entre a teoria das cordas vibrantes com a música. Com este fim, apresentamos uma análise de qualidades físicas do som produzido por uma corda vibrante que dependem de parâmetros que aparecem nas expressões da solução encontrada [10].

Por fim, tendo em vista todo o conteúdo apresentado aqui, este trabalho pode servir para estimular alunos de graduação em Matemática, e mostrar o quanto as ferramentas disponibilizadas da teoria das Equações Diferenciais Parciais são aplicáveis.

# Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C.; **Equações Diferenciais com Aplicações**, 1ª ed., Editora Harbra, 1988.
- [2] BIEZUNER, R. J.; **Equações Diferenciais Parciais i/ii**. Notas de Aula, UFMG, 2009, 124 pag.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução: Valéria magalhães Iório. 8ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [4] BOYER, C. B.; **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2ªed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.
- [5] BRASIL; **Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.
- [6] BREZIS, H.; **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.
- [7] CAPRA, F.; **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. São Paulo: Cultrix, 2006.
- [8] EVES, H.; **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ªed. Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2011.
- [9] DIACU, F.; **Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações**. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004;
- [10] FIGUEIREDO, D. G.; **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4ª ed., Projeto Euclides: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2005.

- [11] GUIDORIZZI, H. L.; **Um Curso de Cálculo**, volume 1, LTC, Rio de Janeiro, 2008.
- [12] GUIDORIZZI, H. L.; **Um Curso de Cálculo**, volume 3, LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [13] IÓRIO, V. M.; **EDP: Um Curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2007.
- [14] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; **Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica**, volume 2, LTC, 9º Ed. Rio de Janeiro, 2012.
- [15] LEITHOLD, L.; **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. Vol. I. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- [16] LEITHOLD, L.; **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. Vol. II. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- [17] LIMA, E. L.; **Curso de Análise**, volume 1, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.
- [18] LIMA, E. L.; **Curso de Análise**, volume 2, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.
- [19] MELCHIORS, A; SOARES, M.; **História do Cálculo Diferencial e Integral**, 2013.
- [20] MOL, R. S.; **Introdução à História da Matemática**, Editora CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2013. 138 p. Disponível em: [www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao\\_a\\_historia\\_da\\_matematica.pdf](http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf). Acesso em: 12 abr. 2017
- [21] NAGLE, R. K.; EDWARD, B. S.; SAFF, A. D.; **Equações Diferenciais**. Trad. Daniel Vieira. 8ª ed., Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2012.
- [22] SILVA, I. L. N.; **Equações Diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em física**, 36 p. Monografia-(TCC)- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.
- [23] SODRÉ, U.; **Equações Diferenciais Parciais**. Notas de Aula, Sercomtel, Rio de Janeiro, 2003, 42 pag.

- [24] TEIXEIRA, F. L.; **Modelos Descritos por Equações Diferenciais ordinárias**, 124 p. Dissertação-(Mestrado)- Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro: 2012. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br>. Acesso em: 13 jun. 2018 ;
- [25] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R.; **Equações Diferenciais**, volume 2. Trad. Alfredo Alves de Farias. 3ª ed., São Paulo, 2003.
- [26] ZILL, D. G.; **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. [S.I]: Cengage Learning Editores, 2003.